Tehnikaolümpiaad

Teoreetiline voor

LAHENDUSED

Versioon 0.9 (02.05.2024)

T1. Kosmosesatelliit *(10 p.)*

a) Tekstis toodud koguenergia avaldisest saame

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\mu m}{r} - \frac{\mu m}{2r} = \frac{\mu m}{2r},$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R+h}}. \quad [\mathbf{1{,}5\ p.}]$$

Siit saame arvutada otsitavad kiirused

$$v_1 = 7788\,\mathrm{m/s}, \quad [\mathbf{0{,}25\ p.}]$$

$$v_2 = 7508\,\mathrm{m/s}. \quad [\mathbf{0{,}25\ p.}]$$

b) Et reaktiivjõud T on konstantne, siis satelliidi kiirendus a on samuti konstantne. Mootori poolt aja t jooksul teepikkusel s tehtav töö on sellisel juhul

$$A = Ts = T\,\overline{v}t = T\frac{v_1+v_2}{2}t,$$

kus $\overline{v}$ on satelliidi keskmine kiirus orbitaalülemineku jooksul. See töö peab olema võrdne satelliidi koguenergia muuduga. Viimast saab esitada mitmel erineval samaväärsel viisil:

$$E_2 - E_1 =$$

$$= -\frac{\mu m}{2r_2} - \left(-\frac{\mu m}{2r_1}\right) = \frac{\mu m}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= -\frac{mv_2^2}{2} - \left(-\frac{mv_1^2}{2}\right) = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) =$$

$$= \frac{m}{2}(v_1+v_2)(v_1-v_2), \;\; (= 1{,}07\times10^8\,\mathrm{J}).$$

Võrdusest $A = E_2 - E_1$ saame

$$Tt = m(v_1 - v_2),$$

mis annab satelliidi impulsi muutuse ülemineku käigus. Siit leiame

$$T = m\frac{v_1 - v_2}{t} = 0{,}32\,\mathrm{N} \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Ümber Maa tehtavate tiirude arvu n saame ligikaudu leida järgmiselt. Eeldame, et satelliit liigub kogu aeg ringorbiidil keskmise raadiusga $(r_1+r_2)/2$. Ülemineku käigus mootori poolt tehtav töö on siis

$$A = Ts = Tn2\pi\frac{r_1+r_2}{2} = E_2 - E_1,$$

millest saame

$$n = \frac{E_2 - E_1}{\pi T(r_1+r_2)} = 7{,}7\,\text{tiiru}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Teine võimalus on kasutada satelliidi keskmist raadiust $\overline{r}$ ja keskmist kiirust $\overline{v}$. Sellisel juhul on kogu läbitud teepikkus $s = n2\pi\overline{r} = \overline{v}t$, kus n on tiirude arv ümber Maa. Sellest saame

$$n = \frac{\overline{v}t}{2\pi\overline{r}} = \frac{t}{2\pi}\frac{v_1+v_2}{r_1+r_2} = 7{,}7\,\text{tiiru}.$$

c) Läbides potentsiaalide vahe U saab ksenooni ioon elektriväljalt energia eU, mille tõttu omandab ioon kineetilise energia $m_i v_i^2/2$, kus m_i on iooni mass. Viimase saab leida tekstis antud molaarmassi ja Avogadro arvu suhtena:

$$m_i = \frac{w_{Xe}}{N_A} = 2{,}18\times10^{-25}\,\mathrm{kg} \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Elektriväljalt saadud energia on võrdne iooni kineetilise energiaga pärast mootorist väljumist:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} = eU, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

millest saame

$$v_i = \sqrt{\frac{2eU}{m_i}} = 148\,\mathrm{km/s}. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

d) Üks ksenooni ioon annab mootorist väljudes satelliidile impulsi $m_i v_i$. Kõikide orbitaalülemineku käigus mootorist väljunud ioonide koguimpulss on järelikult $m_k v_i$, kus m_k kogu kütusena tarbitava ksenooni mass. Punktis b) nägime, et satelliidi impulsi muutus avaldub kujul $m(v_1 - v_2)$. Seega

$$m(v_1 - v_2) = m_k v_i,$$

millest

$$m_k = m\frac{v_1 - v_2}{v_i} = 0{,}095\,\mathrm{kg}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

e) Patarei energiakulu arvutamisel peame arvestama, et patarei kulutab energiat ioonide tekitamiseks ja ka nende kiirendamiseks elektriväljas. Ioonide tekitamiseks kuluv energia on $N\epsilon_i = \frac{m_k}{m_i}\epsilon_i = \frac{m_k N_A}{w_{Xe}}\epsilon_i$, kus N on tekitatud ioonide koguarv. Ioonide kiirendamisele kuluv energia on $NeU = \frac{m_k N_A}{w_{Xe}} eU$. Seega kogu kulunud energia on

$$E = \frac{m_k N_A}{w_{Xe}}(\epsilon_i + eU) = 300\,\mathrm{kW \cdot h}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

T2. Vesinikkaubikud (*14 p.*)

a) Kokku sõidavad 400 autot ühe päevaga

$$400 \times 250 = 100\,000\,\text{km},$$

milleks on vaja vesinikku

$$\frac{100000}{50} = 2000\,\text{kg}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Ühe ööpäevaga toodab päeva jaoks vajaliku koguse vesinikku

$$\frac{2000}{43 \times 24} \approx 2\,\text{elektrolüüserit}.$$

Seega vajalik elektrolüüseri võimsus on

$$N_{elektrolüüser} = 2 \times 1,8 = 3{,}6\,\text{MW}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

b) Kuna ainehulk jääb samaks, siis saame ideaalgaasi olekuvõrrandist tuletada, et gaasi alg ja lõppoleku vahel kehtib seos

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

Mis ümberkirjutatuna tähendab, et

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2V_2}{p_1V_1} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Adiabaatilise soojenemise seadusest saame järeldada, et

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Asendades saadud ruumalade seose eespool leitud võrrandisse, saamegi alg- ja lõppoleku temperatuuri ning rõhu vahelise seose

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

c) Kompressori kasuliku võimsuse saame leida etteantud valemiga, kasutades vesiniku tootmise energiabilansil toodud andmeid

$$N_{kas} = \frac{1,410 \times 1 \times \frac{8{,}314}{2} \times 413}{1,41 - 1} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{7 \times 10^7}{1 \times 10^5}\right)^{\frac{1{,}41-1}{1{,}41}} - 1\right] \times \frac{43 \times 2}{3600} \approx$$

$$\approx 807\,(\text{kW}). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Arvestades kompressori kasutegurit, saame vajalikuks kompressori koguvõimsuseks

$$N_{kompressor} = \frac{807}{0,72} = 1121\,(\text{kW}) \approx$$

$$\approx 1{,}12\,(\text{MW}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Boileri võimsuse arvutamiseks tuleb leida vee soojendamiseks, aurustamiseks ja veeauru soojendamiseks kuluv soojushulk.

$$Q_{kogu} = Q_{vesi} + Q_{aurustamine} + Q_{aur}$$

Tuleb arvestada, et kahe elektrolüüseri puhul on ühes tunnis vaja vett ja sellest toodetud auru

$$m = (452 \times 2) = 904\,(\text{kg})$$

Seega ühes tunnis vajalikud soojushulgad on järgmised

$$Q_{vesi} = cm\Delta T = 4200 \times 904 \times (373 - 293) \approx$$

$$\approx 304\,(\text{MJ}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

$$Q_{aurustamine} = Lm = 2{,}3 \times 10^6 \times 904 \approx$$

$$\approx 2079\,(\text{MJ}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Kuna veeauru soojendamisel muutub temperatuur ja sellest tingituna ka veeauru erisoojus, siis tuleb vajalik soojushulk leida Joonis 3 (b) toodud graafiku aluse pindala kaudu. Selleks saab kasutada integraali

$$Q_{aur} = m \times \int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$$

Seeläbi saame tulemused

$$Q_{aur} = 904 \times \int_{373}^{448} (0.001T^2 - 0.34T + 1877)\,dT =$$

$$= 904 \times \left(\frac{0.001T^3}{3} - \frac{0.34T^2}{2} + 1877T\right)\Bigg|_{373}^{448} \approx$$

$$\approx 129\,(\text{MJ}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Kuna funktsiooni ruutliikme kordaja on suhteliselt väike, siis loetakse täielikult õigeks ka antud funktsiooni graafiku lähendamist sirgele ning selle põhjal keskmise erisoojuse leidmist ja sellega vastava soojushulga arvutamist.

Selle põhjal saame leida soojusprotsessi kogu vajaliku soojushulga

$$Q_{kogu} = 304{+}2079{+}129 = 2512\,(\text{MJ}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Kuna antud veeauru kogus siseneb elektrolüüserisse 1 tunni jooksul, siis saame leida vajaliku soojusvõimsuse

$$N_{soojus} = \frac{2500}{3600} \approx 0{,}70\,\text{MW}. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Soojusvaheti kasutamise tõttu on aga võimalik vesiniku jahutamisel tagastatava jääksoojuse arvelt vähendada boileri tarbitavat elektrilist võimsust. Selle jaoks leiame esmalt komprimeerimise tulemusel saadud vesiniku lõpptemperatuuri

$$T_2 = T_1 \times \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 413 \times \left(\frac{7\times10^7}{1\times10^5}\right)^{\frac{1{,}41-1}{1{,}41}} \approx$$

$$\approx 2775\,(\text{K}). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Jahutusel vabaneva soojushulga saab leida Joonis 3 (a) toodud graafiku aluse pindala kaudu

$$Q_{jahutus} = m \times \int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT = (2\times46)\times$$

$$\times \int_{233}^{2775} (1.65T + 13568)\,dT =$$

$$= 86 \times \left(\frac{1.65T^2}{2} + 13568T\right)\Bigg|_{233}^{2775} \approx$$

$$\approx 3509\,(\text{MJ}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Ka siin loeme täielikult õigeks graafiku põhjal keskmise erisoojuse leidmist ja sellega vastava soojushulga arvutamist.

Seega jahutuse võimsus on

$$N_{jahutus} = \frac{3509}{3600} \approx 0{,}975\,(\text{MW}). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Arvestades ka soojusvaheti kasutegurit saame tagastatavaks soojusvõimsuseks

$$N_{tagastatav} = 0{,}975{\times}0{,}7 \approx 0{,}68\,(\text{MW}). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Sellest tulenevalt on boileri tegelik tarbitav elektriline võimsus vaid

$$N_{boiler} = N_{soojus} - N_{tagastatav} = 0{,}70 - 0{,}68 =$$

$$0{,}02\,\text{MW}. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

d) Kogu vesiniku tootmisahela elektrienergia koguvõimsus on

$$N_{kogu} = N_{elektrol\ddot{u}\ddot{u}ser} + N_{kompressor} + N_{boiler}$$

$$N_{kogu} = 3{,}6{+}1{,}12{+}0{,}02 = 4{,}74\,(\text{MW}). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

e) Ühe vesinikkaubiku päevase sõidu kütuse hinna leidmiseks, tuleb esmalt arvutada 1 kg vesinikkütuse hind. Selleks saame leida, milline on vesiniku tootmisahela ühes tunnis kulutatava elektrienergia hind

$$4{,}74\,\text{MW} \times 1\,\text{h} \times 60\,\frac{\text{EUR}}{\text{MWh}} = 284{,}4\,(\text{EUR}).[\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Seega elektrienergia hind 1 kg vesiniku kohta on

$$\frac{284{,}4}{86} = 3{,}31\left(\frac{\text{EUR}}{\text{kg}}\right).$$

Kuna elektri hind moodustab kogu kütuse hinnast 50%, siis saame 1 kg vesinikkütuse hinnaks

$$\frac{3{,}31}{0{,}5} = 6{,}62\left(\frac{\text{EUR}}{\text{kg}}\right). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Üks auto vajab päevaseks sõiduks vesinikkütust

$$\frac{250}{50} = 5\,(\text{kg}). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Seega ühe vesinikkaubiku päevase sõidu hind on

$$5 \times 6{,}62 = 33{,}1\,(\text{EUR}) \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

f) Päevas kulub elektriautol elektrienergiat

$$30 \times 2{,}5 = 75\,(\text{kWh}), \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

mille hind oleks vastavalt

$$75 \times 0{,}45 = 33{,}75\,(\text{EUR}). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

T3. Päikesepaneelide tootmine (*10 p.*)

a) Vastavalt tekstis antud valemile saame

$$D = D_0 e^{\frac{T_0}{T}} = 0,54 \exp\left(-\frac{4{,}06 \times 10^4}{273+900}\right) =$$

$$= 5{,}02 \times 10^{-16}\,(\mathrm{cm^2/s}). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

b) Ühe kuubi sisse jääb igast nurgas olevast aatomist $\frac{1}{8}$ ja igast tahul olevast aatomist $\frac{1}{2}$. Nurki on kokku 8 ja tahke 6. Lisaks on neli aatomit kuubi sees. Kokku on kuubis räni aatomeid järelikult

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8\,(\mathrm{tk}). \qquad [\mathbf{2\ p.}]$$

Jagades selle arvu kuubi ruumalaga l^3 saame räni aatomite kontsentratsiooniks

$$C_{\mathrm{Si}} = \frac{8}{l^3} = \frac{8}{(5,65 \times 10^{-10})^3} =$$

$$= 4{,}4 \times 10^{28}\,(\mathrm{aatomit/m^3})$$

$$= 4{,}4 \times 10^{22}\,(\mathrm{aatomit/cm^3}). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Fosfori kontentratsioon C peab sellest olema $10^6/30$ korda väiksem. Seega

$$C = 4{,}4 \times 10^{22} \times \frac{30}{10^6} =$$

$$= 1{,}32 \times 10^{18}\,(\mathrm{aatomit/cm^3}). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

c) Lahendame kõigepealt tekstis antud võrrandi

$$C = C_0\, e^{-\frac{2}{\pi}(\sqrt{\pi}x + x^2)}$$

abimuutuja x suhtes. Jagame võrrandi mõlemat poolt kontsentratsiooniga C_0 ja võtame võrrandi mõlemast poolest naturaallogaritmi.

$$\ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = -\frac{2}{\pi}(\sqrt{\pi}x + x^2).$$

Korrutades võrrandit arvuga $\pi/2$ ja viies kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki saame ruutvõrrandi x leidmiseks:

$$x^2 + \sqrt{\pi}x + \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = 0, \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

mille lahendid on

$$x_{1;2} = \frac{-\sqrt{\pi} \pm \sqrt{\pi - 2\pi \ln\left(\frac{C}{C_0}\right)}}{2}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Miinusmärgiga lahend ilmselt ei sobi, sest sellisel juhul tuleb x negatiivne. Plussmärgiga lahend sobib ja pärast lihtsustamist saame

$$x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{C_0}{C}\right)} - 1\right).$$

Siin kasutasime logaritmi omadust $-\ln(a/b) = \ln(b/a)$. Tuletatud valemi põhjal saame x-i väärtuseks

$$x = 2,24. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Võrdusest $x = z/\sqrt{2Dt}$, kus $z = 40\,\mathrm{nm} = 4 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm}$ ja $D = 5{,}02 \times 10^{-16}\,\mathrm{cm^2/s}$ saame avaldada rikastusprotsessi aja t:

$$t = \frac{z^2}{2Dx^2} \approx 3180\,\mathrm{s} = 53\,\mathrm{min}. \qquad [\mathbf{2\ p.}]$$