III Tehnikaolümpiaad

Praktiline voor

LAHENDUSED

Versioon 1.0 (21.02.2024)

T1. Tõstesild *(10 p.)*

a) Ülerõhk p on mõlemas süstlas sama. Kolvide tasakaalutingimused on

$$F_1 = pS_1 = p\pi\frac{d_1^2}{4}, \quad F_2 = pS_2 = p\pi\frac{d_2^2}{4},$$

kus S_1 ja S_2 on kolvide ristlõikepindalad. Siit saame avaldada

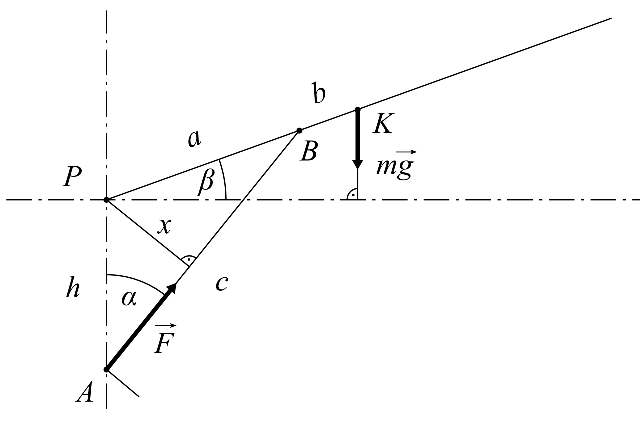
$$F_2 = F_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 12{,}5\,\mathrm{N} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

ja

$$p = \frac{4F_1}{\pi d_1^2} = 7{,}1 \times 10^4\,\mathrm{Pa}. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

b) Silindris mõjuva jõu F leidmiseks ei piisa jõudude tasakaalu võrranditest, sest punktis P mõjub ka toereaktsioon, mis ei ole lähteandmetena teada. Küll aga on piisav vaadelda jõumomentide tasakaalu punkti P suhtes. Jooniselt 1 näeme, et jõu $\vec{F}$ õlg on $x = h\sin\alpha$ ja jõu $m\vec{g}$ õlg on $(a+b)\sin\beta$. Et sild on paigal, siis peab momentide summa olema null:

$$Fh\sin\alpha - mg(a+b)\cos\beta = 0, \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$



Joonis 1: *Tõstesilla arvutuslik skeem. A - tõstesilindri alumine kinnituspunkt, B - tõstesilindri ülemine kinnituspunkt, P - silla pöörlemistelje asukoht, K - silla keskpunkt.*

Millest saame

$$F = mg \cdot \frac{a+b}{h} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Saadud valem ei sobi veel sõltuvuse $F(\beta)$ kirjeldamiseks, sest nurga β muutudes muutub ka nurk α, st $\alpha = \alpha(\beta)$. Vabaneme sellest sõltuvusest siinus- ja koosinusteoreeme kasutades. Siinusteoreemi põhjal saame

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{c} = \frac{\cos\beta}{c},$$

millest

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{c}{a} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Koosinusteoreemi põhjal

$$c = \sqrt{a^2 + h^2 - 2ah\cos(90^\circ + \beta)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + h^2 + 2ah\sin\beta}. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Asetades saadud tulemused jõu F valemisse saame sõltuvuse $F = F(\beta)$, kus kõik teised suurused on konstandid:

$$F = mg\left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{\sqrt{h^2 + a^2 + 2ah\sin\beta}}{h}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Siit näeme, et silindris mõjuv jõud F on maksimaalne kui $\beta = 90^\circ$. [**0,5 p.**] Sellisel juhul

$$F = mg\left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{a+h}{h}$$

ja suhe F/mg on

$$\frac{F}{mg} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{h}\right) > 1. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Näeme, et suhe on ühest suurem arv, mis tähendab, et tõstesilindris mõjuv jõud on suurem kui silla kaal $P = mg$. Selline tulemus on esialgu üllatav, sest näiteks vaba sillaplaadi täielikuks tõstmiseks kraanaga on vaja väiksemat jõudu kui selle "kergitamiseks" tõstesilindriga. Põhjus on selles, et silla massikese K asub punktist P kaugemal kui tõstesilindri kinnituspunkt B ja seetõttu on punktis P mõjuv toereaktsioon allapoole suunatud, mistõttu peab jõud F ka seda kompenseerima.

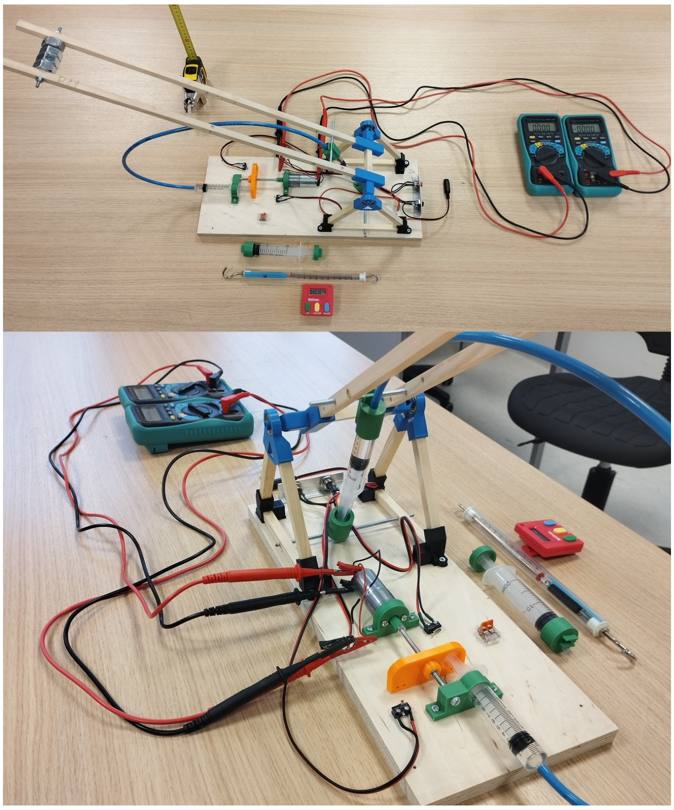
c) Kasuteguri leidmiseks on kõigepealt vaja teada, kui palju energiat kogu süsteem tarbib. Kui tõstmise ajal on pinge U, voolutugevus I ja tõstmiseks kuluv aeg t, siis kulutatud energia on

$$E = IUt. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Viimane valem kehtib eeldusel, et pinge ja voolutugevus on konstantsed. Tõstesilla mudeli korral see aga nii ei ole, sest eelmises punktis nägime, et silindris mõjuv jõud sõltub tõstenurgast β. Siiski võime eeldada arvutuste lihtsustamise eesmärgil, et ülatoodud valem kehtib piisavalt hästi pinge ja voolutugevuse keskmiste väärtuste jaoks:

$$I_k = \frac{I_1 + I_2}{2}, \quad U_k = \frac{U_1 + U_2}{2}, \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

kus indeksid 1 ja 2 tähistavad vastavalt tõstmise algust ja lõppu. Katses võis ka võtta $U_k = 9{,}0\,\mathrm{V}$.



Joonis 2: *Lahenduses kasutatud tõstesilla mudel. Voltmeeter on ühendatud rööbiti mootoriga ja ampermeeter jadamisi mootori ja toiteploki vahele.*

Teksti kohaselt on silla ots (mutrite telg) vaja tõsta kõrguselt, kus sild on horisontaalne, kõrgusele 50 cm laua pinnast. Tehes kõigepealt läbi katsetused mõlema süstlaga ja mõlema kinnituskohaga näeme, et suurem süstal kinnitatuna pöörlemisteljest kaugemasse asendisse ei võimalda silda piisavalt tõsta, sest mootoriga ühendatud süstal ei anna kogu oma käigupikkuse jooksul vajalikul hulgal vett. Seega saame selle konfiguratsiooni kõrvale jätta, sest see ei vasta ül. tingimustele. [**0,5 p.**]

Järele jääb kolm konfiguratsiooni:

Konf. 1. - Suur süstal teljele lähemas asendis
Konf. 2. - Väike süstal teljele kaugemas asendis
Konf. 3. - Väike süstal teljele lähemas asendis

Tõstame kõikidel juhtudel silda horisontaalasendist 50 cm kõrgusele laua pinnast, nagu tekst nõuab. Suurima kasuteguriga konfiguratsiooni väljavalimiseks piisab, kui leiame neile vastava elektrienergia kulu ja valime tulemuste seast välja vähima, sest kasulik töö on kõikidel juhtudel sama:

$$A_{kas} = mg\Delta h, \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

kus m on silla mass, g on raskuskiirendus ja Δh on silla raskuskeskme vertikaalne nihe tõstmise käigus. Sooritame mõõtmised ja kanname need tabelisse. [**1 p.**]

Konf.	I_k (A)	U_k (V)	t (s)	E (J)
1.	0,53	9,0	19,0	90,6
2.	0,62	9,0	17,0	94,9
3.	0,76	9,0	13,5	92,3

Siit näeme, et konfiguratsioon 1. annab vähima energiakulu ja seega suurima kasuteguri. Viimase arvutamiseks on vaja lisaks teada silla massi m ja kõrgust Δh. Dünamomeetriga saame mõõta jõu F_0, mis on vajalik rakendada horisontaalse silla keskpunkti, et see oleks tasakaalus. Silla keskpunkt on märgitud puittalale ja selle juures on augud poldi jaoks, millest saame silda dünamomeetriga tõsta. Mõõtmine annab tulemuseks $F_0 = 2{,}9\,\mathrm{N}$. Keskpunkti K vertikaalse nihke mõõtmine annab $\Delta h = 0{,}18\,\mathrm{m}$. Kasulik töö on seega

$$A_{kas} = mg\Delta h = F_0\Delta h = 0{,}52\,\mathrm{J}.$$

Konfiguratsioonile 1. vastav kasutegur on

$$\eta = \frac{A_{kas}}{E_{1.}} = 0,0058 \approx 0{,}6\,\%. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Näeme, et kasutegur on äärmiselt väike. Põhjuseid on mitmeid. Peamiseks on ilmselt suur hõõrdumine mootori ja süstla vahelises ülekandemehanismis. Et mootori ja süstla teljed ei ole kohakuti, siis mõjub oranžis plaadis tugev paindejõud, mis suurendab hõõrdumist telje ja plaadi vahelises mutris. Lisaks hõõrdub oranž plaat ka vastu vineerist alusplaati. Olulised hõõrdejõud on ka süstalde kolvi ja silindri vahel. Mootori otsas on käigukast, millel on oma teatav kasutegur jne. Tõstesilla kasutegurit saaks parandada näiteks ülekandemehanismi õlitamisega. Õlitada saab ka süstalde kummitihendit. Hea tulemuse annaks tõenäoliselt ka teise paralleelse ilma keermeta telje lisamine oranži plaadi külge teiselepoole süstalt. See aga eeldab juba detailide ümbertegemist. [**0,5 p.**]

T2. Elektroonika jahutamine (*12 p.*)

a) Jadaühenduse puhul saadakse ahela summaarne takistus komponentide takistuste liitmisel: $R_{\text{Jada}} = 8,2 + 8,2 = 16,4\Omega$. [**0,5 p.**] Rööptühenduse korral liituvad takistuste pöördväärtused. Antud juhul on kolm takistust rööbiti: [**0,5 p.**]

$$R_{\text{rööp}} = \left(\frac{1}{8,2} + \frac{1}{8,2} + \frac{1}{8,2}\right)^{-1} = \frac{8,2}{3} = 2,73\Omega.$$

b) Rakendades takistitele võimsuse $1,5$ W, tõuseb nende temperatuur ligikaudu 20 °C võrra väliskeskkonna temperatuurist kõrgemaks (täpne väärtus sõltub suuresti õhuvoolust seadme ümber). Seega $\Delta T = 20\,°\text{C}$. [**1 p.**] Kuue takisti jahutatav pindala on joonise järgi

$$A_T = 6 \cdot [2 \cdot (22 \cdot 9,2) + 2 \cdot (9,5 \cdot 9,2) + 22 \cdot 9,5] =$$

$$= 4700\,\text{mm}^2 = 4,7 \times 10^{-3}\,\text{m}^2. \quad [\mathbf{0,5\ p.}]$$

Konvektsiooniteguri väärtus on seega

$$h_t = \frac{1,5}{4,7 \cdot 10^{-3} \cdot 20} = 15,9\,\text{W}/(\text{m}^2 \cdot °\text{C}). \quad [\mathbf{0,5\ p.}]$$

c) Antud katse puhul võtab stabiilse väärtuse saavutamine aega ligikaudu 5-10 minutit. Esitatud on takistite ja vee temperatuuride vahe iga 30 sekundi tagant (vt järgnev tabel). [**1 p.**]

t (s)	T_{vesi} (°C)	$T_{takistid}$ (°C)	ΔT (°C)
0	24,5	27	2,5
30	24,5	47	22,5
60	24,6	61	36,4
90	24,6	76	52,4
120	24,7	87	62,3
150	24,9	95	70,1
180	25,1	101	75,9
210	25,2	106	80,8
240	25,3	110	84,7
270	25,4	112	86,6
300	25,6	115	89,4
330	25,7	116	90,3
360	25,8	118	92,2
390	25,9	119	93,1
420	26,1	120	93,9
450	26,2	120	93,8
480	26,3	121	94,7
510	26,4	121	94,6
540	26,6	122	95,4
570	26,8	122	95,2
600	26,9	122	95,1

Mõõtmistulemuste tabel.

Rakendades süsteemile pinge 12 V, same takisteid läbiva võimsuse arvutada pinge ja nende summaarse takistuse järgi:

$$P_{takistid} = \frac{U^2}{R_{rööp}} = 26,3\,\text{W}. \quad [\mathbf{0,25\ p.}]$$

Takistite temperatuur saavutab stabiilse väärtuse ligikaudu 122 °C juures ning samal ajal on jahutusvee temperatuur ligikaudu 27 °C, mistõttu on $\Delta T = 95\,°\text{C}$. Soojusvahetustegur on seega:

$$Y = \frac{P}{\Delta T} = 0,28\,\text{W}/°\text{C}. \quad [\mathbf{0,25\ p.}]$$

Süsteemi soojusmahtuvuse arvutamiseks tuleb arvestada kogu katse aja jooksul (300 sekundit) süsteemi lisatud energiaga ehk $E_k = 600 \cdot 26,3 = 15\,805\,\text{J}$. Sama aja jooksul tekkinud temperatuuri tõusu arvestades saabki arvutada süsteemi soojusmahtuvuse:

$$C_{süsteem} = \frac{E_k}{\Delta T} = 166,4\,\text{J}/°\text{C}. \quad [\mathbf{0,5\ p.}]$$

d) Kõige lihtsam viis vesijahuti voolukanali pindala arvutamiseks on see lihtsustada silindriks. Ainult voolukanali pikemat külge kasutades on silindri pikkus ligikaudu $33,5 \cdot 4 = 134\,\mathrm{mm}$ ning selle ümbermõõt on $\pi \cdot 5 = 15{,}7\,\mathrm{mm}$. See teeb voolukanali pindalaks $A_V K = 134 \cdot 15,7 = 2104\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}0021\,\mathrm{m}^2$. [**0,5 p.**] Pinna konvektsioonitegur on seega:

$$h = \frac{P}{A\Delta T} \approx 132\,\mathrm{W/(m^2{\cdot}^\circ C)}. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

e) Tipuvõimsus sõltub süsteemi soojusmahtuvuse täitmiseks kuluvast võimsusest ning ka jahutusvõimsusest. Soojusmahtuvuse täitmiseks vajaminev võimsus on leitav tipukoormuse kestvuse, nõutud temperatuuride vahe ning eelnevalt arvutatud soojusmahtuvuse järgi: [**1,5 p.**]

$$P_{mahtuvus} = \frac{E_{mahtuvus}}{t} = \frac{C_{süsteem}\Delta T}{t} = 1664\,\mathrm{W}.$$

Antud ülesande puhul muutub jahuti temperatuur vahemikus 50 … 150 °C, mistõttu takistite keskmine temperatuur üle ajavahemiku on 100 °C. Jahutusvee temperatuuri võib lugeda antud ajavahemikus konstantseks. Temperatuuride vahe on seega 75 °C ning jahutusvõimsuse saab välja arvutada:

$$P_{jahutus} = Y\Delta T = 21\,\mathrm{W}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Takistitele võib kümneks sekundiks rakendada nende kahe võimsuse summa:

$$P_{tipp} = P_{jahutus} + P_{mahtuvus} = 1685\,\mathrm{W}. \quad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

f) Takistitele rakendatud võimsused, temperatuuride vahed ja konvektsioonitegurid erinevatel pingetel on ligikaudu: [**0,25 p.**]

$$\begin{aligned} P_{6V} &= 6,59\ \mathrm{W} & P_{8V} &= 11,7\ \mathrm{W} \\ P_{10V} &= 18,3\ \mathrm{W} & P_{12V} &= 26,3\ \mathrm{W} \\ \Delta T_{6V} &= 30\ ^\circ\mathrm{C} & \Delta T_{8V} &= 50\ ^\circ\mathrm{C} \\ \Delta T_{10V} &= 70\ ^\circ\mathrm{C} & \Delta T_{12V} &= 90\ ^\circ\mathrm{C} \\ h_{6V} &= 104\ \mathrm{W/(m^2{}^\circ C)} & h_{8V} &= 111\ \mathrm{W/(m^2{}^\circ C)} \\ h_{10V} &= 124\ \mathrm{W/(m^2{}^\circ C)} & h_{12V} &= 132\ \mathrm{W/(m^2{}^\circ C)} \end{aligned}$$

Konvektsiooniteguri järgi saab välja arvutada vee voolukiiruse jahutis:

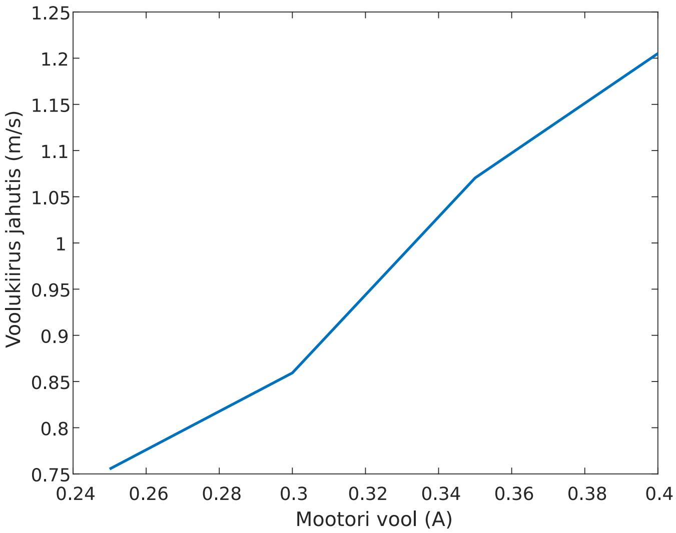
$$h_J = \lambda_{vesi}\sqrt{\frac{v}{D}} \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{h_J \cdot D}{\lambda_{vesi}}\right)^2 \quad [\mathbf{0{,}25\ p.}]$$

$$\begin{aligned} v_{6V} &= 0,76\ \mathrm{m/s} \\ v_{8V} &= 0,86\ \mathrm{m/s} \\ v_{10V} &= 1,07\ \mathrm{m/s} \\ v_{12V} &= 1,21\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Pumbale rakendatud voolu määramiseks saab takistid vooluringist lahti ühendada: [**0,25 p.**]

$$\begin{aligned} I_{P6V} &= 0,25\ \mathrm{A} \\ I_{P8V} &= 0,30\ \mathrm{A} \\ I_{P10V} &= 0,35\ \mathrm{A} \\ I_{P12V} &= 0,4\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

Tulemuseks on järgmine graafik: [**0,25 p.**]



g) Antud juhul kasutame alapunktis c) kogutud väärtuseid ajavahemikus $t = 300 \ldots 600$ s, kuid õigeks loetakse ka muud sarnased lahenduskäigud. Katse käigus süsteemi lisatud energia on $E_\Sigma = 300 \cdot 26,3 = 7890$ J. Sellele vastav vee temperatuuri tõus on $\Delta T_{vesi} = 26,9 - 25,6 = 1,3$ °C ning ühe liitri vee mass $m_{vesi} = 1$ kg. Vee erisoojus on seega: [**1,5 p.**]

$$c_v = \frac{E_\Sigma}{m_{vesi} \cdot \Delta T_{vesi}} = \frac{7890}{1 \cdot 1,3} = 6079\ \mathrm{J/(kg^\circ C)}$$

Vee tõeline erisoojus on 4186 J/(kg°C). Antud katses saadakse üldjuhul liiga kõrge väärtus peamiselt seetõttu, et arvestatav osa soojusest läheb kaduma jahutist ja veeanumast väliskeskkonda. [**0,5 p.**]

T3. Elektrimootori ehitamine (*12 p.*)

a) Mootori üheks olulisemaks karakteristikuks on selle pöördemoment T ja iga mootori juures on tähtis selle momendi maksimeerimine. Uurides tekstis toodud valemeid näeme, et pöördemoment on proportsionaalne staatori ja rootori mähise keerdude arvu korrutisega:

$$T \propto n_S n_R. \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Lisaks on kogu keerdude arv $n_S + n_R$ konstantne, sest mähitava traadi pikkus on fikseeritud:

$$n_S + n_R = \text{const.} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Matemaatikast on teada, et kui kahe arvu summa on fikseeritud, siis on korrutise väärtus suurim juhul, kui tegurid on võrdsed. Seega $n_S = n_R$ korral on pöördemoment maksimaale. [**1 p.**]

Märkus: Viimast väidet on lihtne tõestada tuletise abil. Vaatleme funktsiooni $T = xy$ koos lisatingimusega $x + y = c \implies y = c - x$. Saame $T = x(c - x)$ ja $T' = c - 2x$. Tuletis on null kui $x = c/2$ ja järelikult $y = c - c/2 = c/2$. Seega funktsiooni T ekstreemum on kohal $x = y = c/2$. Et teine tuletis kohal $c/2$ on negatiivne, $T''(c/2) = -2$, siis järelikult on tegemist maksimumiga.

b) Elektrimootori ehitamine vastavalt ülesannetelehel toodud juhendile. Hindamine toimus olümpiaadi ajal. [**7 p.**]

c) Keerdude arvu saab määrata juba mootori ehitamise ajal ning hästi ehitatud mootor koosneb ligikaudu 160 keerust, mistõttu $n_R = n_S = 80$. Staatori plaadi ristlõikepindala on lihtsasti leitav, kui korrutada kokku selle laius ja paksus, mis on ligikaudu 10 ja 1 mm ehk $A_S = 10\,\text{mm}^2 = 1 \times 10^{-5}\,\text{m}^2$. Rootori laius a_R on samuti lihtsasti mõõdetav ning selle väärtus on 10 mm ehk 0,01 m. Sama kehtib ka rootori pikkuse l_R kohta, mille väärtuseks on 0,025 m. Kõigepealt saab välja arvutada magnetvoo:

$$\Phi_S = \frac{n_S I}{R} \approx 3{,}3 \times 10^{-6}\,\text{Wb}.$$

Seejärel momendi

$$T = \frac{n_R l_R a_R \Phi_S I}{A_S} \approx 1{,}3 \times 10^{-2}\,\text{N}\cdot\text{m}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

d) Mootori maksimaalne kiirus tühijooksul on piiratud rootoris tekkiva vastuelektromotoorjõuga. Mida kiiremini pöörleb mootor, seda suurem on vastuelektromotoorjõud vastavalt Faraday induktsiooniseadusele. Seega saavutatakse maksimaalne kiirus siis, kui vastuelektromotoorjõud on võrdne toitepingega ehk $\mathcal{E}_V = U = 4{,}5\,\text{V}$. [**0,5 p.**]

Kui valmis ehitatud mootorile rakendada 4,5 V, siis annab toiteplokk voolutugevuseks ligikaudu 2,5 A. [**0,5 p.**] Tekstis toodud valemi põhjal saame

$$\omega = \frac{\mathcal{E}_V A_S}{n_R \Phi_S} = \frac{\mathcal{E}_V A_S R}{n_R n_S I} \approx 0{,}17\,\text{p/s}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Mootori teoreetiline pöörlemiskiirus tuleb seega ligikaudu 0,17 p/s ehk 10,2 p/min.

Märkus: Tekstis toodud reluktantsi väärtuseks oli eksikombel antud $R = 4{,}8 \times 10^7\,1/\text{H}$, tegelik väärtus on aga sada korda suurem, ehk $R = 4{,}8 \times 10^9\,1/\text{H}$. Seetõttu annab tekstis toodud andmete põhjal arvutamine tulemuseks ebarealistlikult väikse pöörlemiskiiruse (ja ka 100 korda suuremad väärtused Φ_S ja T jaoks). Tegelik teoreetiline pöörlemiskiirus õige reluktantsi väärtusega arvutades on 1020 p/min. Segaduse vältimiseks jäeti käesolevas lahenduses arvutustulemused sellisteks nagu teksti andmete põhjal tuleks.