IV Tehnikaolümpiaad

Teoreetiline voor

LAHENDUSED

Versioon 1.0 (03.02.2025)

T1. Robotmanipulaator (*12 p.*)

Autorid: Johannes Muru ja Päivo Simson.

a) Kõige kõrgemale ulatub manipulaator sirges asendis ($\alpha_2 = 0$). Otsitav kõrgus h_{max}, lõik d ja lõik $O_1K = l_1 + l_2$ moodustavad täisnurkse kolmnurga, millest

$$h_{max} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - d^2}. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

b) Lõigu O_1O_2 projektsioon teljele x_1 on $l_1 \cos\alpha_1$ ja lõigu O_2K projektsioon teljele x_1 on $l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$. [**1 p.**] Koordinaat x_1 avaldub nende projektsioonide summana:

$$x_1 = l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Analoogiliselt saame

$$y_1 = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

c) Punktis K mõjub massile m vertikaalselt alla suunatud gravitatsioonijõud $m\vec{g}$. [**0,25 p.**] Selle jõu õlg punkti O_1 suhtes on võrdne eelmises punktis leitud koordinaadiga x_1. [**0,25 p.**] Järelikult jõumomendi moodul [**0,5 p.**]

$$M = mgx_1 = mg(l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

d) Kirjeldatud liikumise käigus on koordinaat x_1 konstantne ja võrdne kaugusega d:

$$x_1 = l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = d. \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

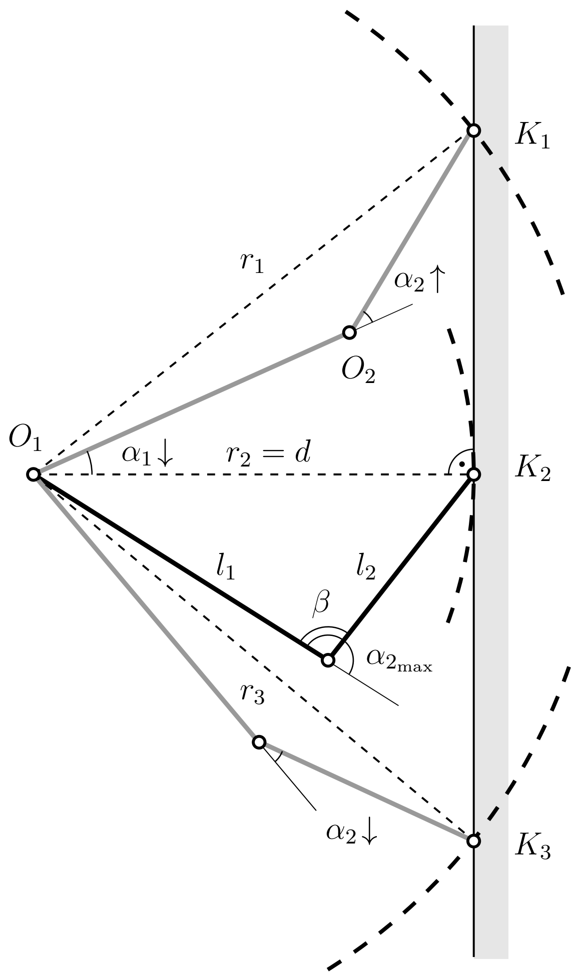
Siit saame avaldada

$$\alpha_2 = -\alpha_1 + \arccos\left(\frac{d - l_1 \cos\alpha_1}{l_2}\right). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Asendades siia seose $\alpha_1 = \gamma - \omega t$ saame otsitava liikumisseaduse [**1 p.**]

$$\alpha_2(t) = \omega t - \gamma + \arccos\left(\frac{d - l_1 \cos(\gamma - \omega t)}{l_2}\right).$$

Punktis *a)* leitud algtingimuse põhjal saame leida ka konstandi γ väärtuse: $\gamma = \arccos\left(\frac{d}{l_1+l_2}\right)$.



Joonis 1: *Manipulaatori liikumise analüüs. Punktiiriga näidatud kaared vastavad manipulaatori otspunkti kujuteldavale liikumisele juhul, kui nurk α_2 vaadeldaval hetkel ei muutuks.*

e) **Lahendus 1.** Olgu r punkti K kaugus punktist O_1 (Joonisel 1 kaugused r_1, r_2 või r_3). Vaatleme kolmnurka O_1O_2K. Paneme tähele, et mida väiksem on kaugus r, seda suurem on α_2 ja vastupidi. Nurga α_2 suurimale väärtusele vastab järelikult kauguse r vähim väärtus $r_{min} = d$. [**3 p.**] Seega saame $\alpha_{2_{\max}}$ leida kolmnurgast külgedega l_1, l_2 ja d. [**0,5 p.**] Koosinusteoreemi põhjal

$$d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\beta \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

ja arvestades, et $\alpha_{2_{\max}} = 180° - \beta$, saame

$$\alpha_{2_{\max}} = \arccos\left(\frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

e) **Lahendus 2.** Nurk α_1 väheneb liikumise käigus ühtlase nurkkiirusega ω ja manipulaatori otspunkt K liigub mööta töötasapinda allapoole. Uurime manipulaatori liikumist (Joonis 1) järjestikustel ajahetkedel, kui otspunkt K on asendites K_1, K_2 ja K_3. [**0,5 p.**] Vaatleme kõigepealt asendit K_1. Kui nurk α_2 ei muutuks, siis liiguks manipulaatori otspunkt nurga α_1 vähenedes mööda ülemist ringjoone kaart raadiusega r_1. Selleks, et otspunkt jääks tööpinnale, peab nurk α_2 vaadeldaval hetkel suurenema. [**0,5 p.**] Uurime nüüd asendit K_3. Kui nurk α_2 ei muutuks, siis liiguks manipulaatori otspunkt mööda alumise ringjoone kaart raadiusega r_3. Et otspunkt jääks tööpinnale, peab α_2 vaadeldaval hetkel vähenema. [**0,5 p.**] Kui esimesel juhul α_2 kasvas ja teisel juhul vähenes, siis järelikult peab α_2 saavutama mingil vahepealsel hetkel maksimaalse väärtuse, ja sellel hetkel α_2 ei vähene ega suurene. [**0,5 p.**] Seega mängides samasugust mängu, nagu eelmise kahe asendi korral, peaksime saama maksimaalse α_2 korral trajektooriks ringjoone kaare, mis ei lõika töötasapinda, vaid ainult puutub seda (sest ainult siis saab α_2 jääda vaadeldaval hetkel muutumatuks). Joonise põhjal on selge, et see realiseerub siis, kui manipulaatori otspunkt on punktiga O_1 samal kõrgusel, ehk joonisel näidatud punktis K_2. [**1 p.**] Näeme, et nurga $\alpha_{2_{\max}}$ saame leida kolmnurgast külgedega l_1, l_2 ja d. [**0,5 p.**] Koosinusteoreemi põhjal

$$d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\beta \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

ja arvestades, et $\alpha_{2_{\max}} = 180° - \beta$, saame

$$\alpha_{2_{\max}} = \arccos\left(\frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right). \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Märkus: maksimumväärtust on põhimõtteliselt võimalik leida ka tuletise abil. Selleks võib uurida punktis d) saadud funktsiooni $\alpha_2(\alpha_1) = -\alpha_1 + \arccos\left(\frac{d - l_1\cos\alpha_1}{l_2}\right)$ ja lahendada võrrand $\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_1} = 0$. Selline lähenemine on aga väga tülikas ja nõuab keerukate avaldistega töötamist.

T2. Päikese energial töötav veemagestussüsteem *(10 p.)*

Autor: Päivo Simson

a) Kõiki soojuskadusid arvestab kasutegur η. Vee soojendamiseks kuluva energiaga ei pea arvestama ja kondenseerumisel energiat süsteemi ei tagastata. Seega päikeselt tulev energia kulub täielikult vee aurustamiseks ja kasuteguriga arvesse võetud kuludeks. Seega

$$E_{1\,\mathrm{kg}} = \frac{\lambda m}{\eta} = $$
$$= \frac{2{,}26 \times 10^6\ \mathrm{J/kg} \times 1\,\mathrm{kg}}{0.5} = 4{,}52{\times}10^6\ \mathrm{J}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

b) Ühe päeva jooksul päikeselt saadav kasulik energia on $E = qST\eta$, kus S on katuse pindala ja T on päeva kestus sekundites. Siit saame vajaliku katuse pindala:

$$S = \frac{E}{qT\eta} = \frac{mE_{1\,\mathrm{kg}}}{qT} = $$
$$= \frac{200\,\mathrm{kg} \times 4{,}52 \times 10^6\ \mathrm{J/kg}}{800\,\mathrm{W/m^2} \times 8 \times 3600\,\mathrm{s}} = 39{,}2\,\mathrm{m}^2. \quad [\mathbf{3\ p.}]$$

c) Vaatleme 1 h jooksul toimuvaid protsesse. Aurustumise kiirus on $c_a = 200\,\mathrm{kg}/8\,\mathrm{h} = 25\,\mathrm{kg/h}$. Vee massi jäävus väljendub kujul $c_1 = c_a + c_2$, ehk

$$c_1 - c_2 = 25\,\mathrm{kg/h}. \quad [\mathbf{1{,}5\ p.}]$$

Ainult soola jaoks saame $0,03c_1 = 0,1c_2$, ehk

$$3c_1 = 10c_2. \quad [\mathbf{1{,}5\ p.}]$$

Saame lineaarse võrrandisüsteemi voolukiiruste leidmiseks:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 25 \\ 3c_1 - 10c_2 = 0 \end{cases}$$

Selle lahendamisel saame

$$c_1 = 35{,}7\,\mathrm{kg/h}, \quad c_2 = 10{,}7\,\mathrm{kg/h}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

T3. Osoneerimine (*10 p.*)

Autor: Irina Petrotšenko

a) *Lahustunud osoon esimeses etapis.* Soovitud osooni kontsentratsioon: $C_{\text{lõpp}} = 0{,}8\,\text{mg/L}$. Esimene etapp saavutab 70% sellest eesmärgist:

$$C_1 = 0.7 \times C_{\text{lõpp}} = \\ = 0.7 \times 0{,}8\,\text{mg/L} = 0{,}56\,\text{mg/L} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Vee kogumaht: $V = 25\,000\,\text{L}$. Esimeses etapis lahustunud osooni mass:

$$\text{Osooni mass} = C_1 \times V = \\ = 0{,}56\,\text{mg/L} \times 25\,000\,\text{L} = \\ = 14\,000\,\text{mg} = 14\,\text{g} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

b) *Osooni lagunemine etappide vahel.* Lagunemise kiiruskonstant: $k_1 = 0{,}02\,\text{min}$. Ülekande aeg: $t = 20\,\text{min}$. Esialgne kontsentratsioon enne ülekannet: $C_1 = 0{,}56\,\text{mg/L}$. Kontsentratsioon pärast lagunemist:

$$C(t) = C_1 \times e^{-k_1 t} = \\ = 0{,}56\,\text{mg/L} \times e^{-0.02\times 20} = 0{,}56 \times e^{-0.4} = \\ = 0{,}56 \times 0.6703 = 0{,}3754\,\text{mg/L} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Osooni kadu ülekande ajal:

$$\Delta C = C_1 - C(t) = \\ = 0{,}56 - 0{,}3754 = 0{,}1846\,\text{mg/L} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Kadunud osooni mass:

$$\Delta C \times V = 0{,}1846\,\text{mg/L} \times 25\,000\,\text{L} = \\ = 4615\,\text{mg} = 4{,}615\,\text{g} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

c) *Täiendav lahustunud osooni kogus teises etapis.* Sihtkontsentratsiooni taastamiseks:

$$\Delta C_2 = C_{\text{lõpp}} - C(t) = \\ = 0{,}8 - 0{,}3754 = 0{,}4246\,\text{mg/L} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Vajalik täiendava osooni mass:

$$\text{Osooni mass (2. etapp)} = \Delta C_2 \times V = \\ = 0{,}4246\,\text{mg/L} \times 25\,000\,\text{L} = \\ = 10\,615\,\text{mg} = 10{,}615\,\text{g} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

d) *Osooni maksumus.* Nõutav lahustunud osooni koguhulk:

$$\text{Lahustunud osooni koguhulk} = \\ = \text{Osoon (1. etapp)} + \text{Osoon (2. etapp)} = \\ = 14{,}0\,\text{g} + 10{,}615\,\text{g} = 24{,}615\,\text{g} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Arvestades 10% lahustumata osooni:

$$\text{Genereeritud osoon} = \frac{\text{Lahustunud osoon}}{1 - 0.10} \\ = \frac{24{,}615\,\text{g}}{0.90} = 27{,}35\,\text{g} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Energiatarve:

$$\text{Energia} = \text{osooni mass (kg)} \times \text{energiakulu} = \\ = 0{,}027\,35\,\text{kg} \times 20\,\text{kWh/kg} = 0{,}547\,\text{kWh} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

Maksumus:

$$\text{Maksumus} = \text{energia} \times \text{kulu kWh kohta} = \\ = 0{,}547\,\text{kWh} \times 0{,}15\,\text{EUR/kWh} = \\ = 0{,}082\,05\,\text{EUR} \qquad [\mathbf{0{,}5\ p.}]$$

e) *Osooni lagunemine pärast töötlemist.* Lagunemise kiiruskonstant: $k_2 = 0{,}05\,\text{min}$; Aeg: $t = 40\,\text{min}$; Esialgne kontsentratsioon: $C_0 = 0{,}8\,\text{mg/L}$. Kontsentratsioon pärast lagunemist:

$$C(t) = C_0 \times e^{-k_2 t} = 0{,}8\,\text{mg/L} \times e^{-0.05\times 40} = \\ = 0{,}8 \times e^{-2} = 0{,}8 \times 0.1353 = \\ = 0{,}1082\,\text{mg/L} \qquad [\mathbf{1\ p.}]$$

Pärast 40 minutit langeb osooni kontsentratsioon 0,1082 mg/L-ni, mis ei ole desinfitseerimiseks piisav. [**1 p.**]