

V Tehnikaolümpiaad

Teoreetiline voor

LAHENDUSED

Version 0.9 (07.02.2026)

T1. Silla võnkumised (10 p.)

Autor: Päivo Simson.

a) Teksti kohaselt on eelpainde kuju parabool. Et liikumatud otpunktid A ja B paiknevad z -telje suhtes sümmeetriliselt, on parabooli võrrand kujul

$$z = ax^2 + c. \quad [\mathbf{1} \text{ p.}]$$

Jääb veel määrata kordaja a ja vabaliige c . Ots-
punktides peab $z = 0$, seega

$$z(L/2) = z(-L/2) = a\frac{L^2}{4} + c = 0,$$

millest

$$a = -\frac{4c}{I^2}. \quad [\mathbf{1} \text{ p.}]$$

Kordaja a määramiseks kasutame silla keskpunkti $x = 0$ liikumiseks kasutatavat vedru mudelit. Eelpainutatud olekus on sild toestatud ja vedru on pingevas seisundis. Tugede eemaldamisel peab vedru vajuma täpselt niipalju, et sild jääks absoluutselt sirgeks. See tähendab, et efektiivne mass $M/2$ peab vajuma sellise Δz võrra, et pärast vajumist oleksid gravitatsioonijõud ja vedru elastsusjõud tasakaalus:

$$\frac{Mg}{2} = k\Delta z \quad [\mathbf{1 \ p.}]$$

Siit saame avaldada tugede eemaldamisega kaasneva silla keskpunkti vertikaalse nihke Δz , mis peab võrduma eelpaindega kohal $x = 0$. Seega $\Delta z = z(0) = c$ ja me saame

$$c = \frac{Mg}{2k}. \quad [\mathbf{1 \ p.}]$$

Silla eelpainde kuju

$$z = -\frac{2Mg}{kL^2}x^2 + \frac{Mg}{2k} = \frac{Mg}{2k} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2} \right).$$

b) Jäikus k on lihtsasti leitav tasakaalutingimusest $m_0 g = k \Delta z_0$, millest

$$k = \frac{m_0 g}{\Delta z_0} = 7,36 \times 10^6 \text{ N/m.} \quad [0,5 \text{ p.}]$$

Teksti kohaselt koosneb sild kaheksast 30 tonnisest paneelist. Silla sildeosa kogumass on seega

$$M = 8 \times 30 \times 10^3 = 2,4 \times 10^5 \text{ kg} \quad [0,5 \text{ p.}]$$

Oma­võnkesageduse leidmiseks saame kasutada vedrupendli võnkeperioodi valemit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ning sageduse ja perioodi vahelist seost $f = 1/T$. Siin peame arvestama, et massi m asemel on meil silla efektiivne mass $M/2$. Omavõnkesageduseks saame

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{M}} = 1,25 \text{ Hz.} \quad [\mathbf{1 \ p.}]$$

c) Kui auto liigub kiirusega v , siis tabab see silla vuugikohti sagedusega $f = v/l$, kus l on sillapaneeli pikkus. Sild võib minna resonantsi, kui auto löökide sagedus ühtib silla omavõnkesagedusega f_0 , ehk kui $f = v/l = f_0$. Seega kriitiline kiirus

$$v_{\text{kr}} = f_0 l = 54 \text{ km/h.} \quad [1 \text{ p.}]$$

Kui autode kolonn liigub kriitilise kiirusega v_{kr} , siis kõige halvemal juhul on kõikide autode vahekaugus täpselt l , nii et löögid toimuvad kõikides vuugikohtades samaaegselt. Maksimaalne jõud, millega üks auto silda silla keskel mõjutab, on $F_1 = ma_{\max}$. Sillal on kokku 7 aktiivset vuuki, punktides A ja B olevad vuugid on liikumatud ja ei avalda võnkumisele mõju. Keskmine vuuk on seevastu kõige suurema mõjuga. Kolonni võib vaadelda kui efektiivset massi $7m/2$, mis mõjutab silda sagedusega $f = f_0$ ja maksimaalse jõuga

$$F_{\max} = \frac{7}{2}ma_{\max}. \quad [2 \text{ p.}]$$

Sellisel juhul kujuneb teatud aja möödudes silla võnkeamplituudiks tekstis toodud valemi põhjal

$$A = \frac{F_{\max}}{k} \frac{1}{2\beta} = \frac{7ma_{\max}}{4k\beta} = 0,24 \text{ m.} \quad [1 \text{ p.}]$$

See tähendab, et sild võngub peaaegu poole meetri ulatuses üles-alla. Lubatud suurim võnkeamplituud oli $L/1000 = 0,096 \text{ m}$, mis on leitud amplituudist 2,5 korda väiksem. Seega antud sild on ohtlik.

T2. Koostootmisjaama aurutsüklil (14 p.)

Autorid: Laura Kiolein ja Päivo Simson.

a) Auru saamine toimub kolmes etapis: vee soojendamine keemistemperatuurini $T_k = 250,35^\circ\text{C}$, aurustumine ja auru kuumutamine temperatuurini $T_{v2} = 285^\circ\text{C}$. Soojushulkade arvutamiseks on vaja teada keskmisi erisoojusi. Tabelist saame vee ja auru jaoks vastavalt [1 p.]

$$c_v = \frac{4212,7 + 4873,9}{2} = 4543,3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$$

$$c_a = \frac{4020,3 + 3001,5}{2} = 3510,9 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$$

Kogu vajalik soojushulk Q :

$$\begin{aligned} Q &= c_v(T_k - T_{v1}) + L + c_a(T_{v2} - T_k) = \\ &= 4543,3 \cdot (250,35 - 105) + 1,713 \cdot 10^6 + \\ &+ 3510,9 \cdot (285 - 250,35) = \\ &= 2,495 \times 10^6 \text{ J/kg} \approx 2,50 \text{ MJ/kg.} \quad [2 \text{ p.}] \end{aligned}$$

b) Vajaliku soojusvõimsuse N leidmiseks korrutame vee massvooluhulga μ_1 ühe kilogrammi vee aurustamiseks kulunud soojushulgaga Q :

$$\begin{aligned} N &= \mu_1 \cdot Q = 4 \text{ kg/s} \cdot 2,495 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = \\ &= 9,98 \times 10^6 \text{ W} \approx 10 \text{ MW.} \quad [1 \text{ p.}] \end{aligned}$$

Termoõli vooluhulga μ_2 saame soojusbilansi võrrandist $N = \mu_2 c_{\bar{o}}(T_{\bar{o}1} - T_{\bar{o}2})$:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{N}{c_{\bar{o}}(T_{\bar{o}1} - T_{\bar{o}2})} = \\ &= \frac{9,98 \cdot 10^6}{2300 \cdot (315 - 265)} \approx 86,8 \text{ kg/s.} \quad [1 \text{ p.}] \end{aligned}$$

c) Isoleerimata toru soojuskao saame arvutada otse tekstis toodud valemi põhjal, kus toru välispindala toru pikkusühiku kohta on $S/L = 2\pi r$:

$$\begin{aligned} q_L &= q/L = \alpha \cdot 2\pi r(T_p - T_k) = \\ &= 10 \cdot 2\pi \cdot 0,20 \cdot (290 - 30) \approx 3267 \text{ W/m.} \quad [1 \text{ p.}] \end{aligned}$$

d) Olgu toru välistemperatuur $T_0 = 290^\circ\text{C}$, ümbritseva õhu temperatuur $T_1 = 30^\circ\text{C}$ ja esialgu tundmatu isolatsioonikihi välispinna temperatuur T . Isolatsioonikihi siseraadius on võrdne toru raadiusega $r_s = 20 \text{ cm}$ ja välisraadius on $r_v = r_s + R = 25 \text{ cm}$.

Statsionaarses olekus on isolatsioonikihti läbiv soojusvoog q võrdne isolatsioonikihi välispinnalt keskkonda kanduva soojusvooga (nagu oli tekstis öeldud). See annab võrrandid

$$q = 2\pi k\beta L(T_0 - T) = 2\pi r_v L\alpha(T - T_1), \quad [1 \text{ p.}]$$

kus tähistasime $\beta = 1/\ln(r_v/r_s) = 4,48$. Teisest võrdusest saame

$$k\beta(T_0 - T) = r_v\alpha(T - T_1),$$

mis on lineaarne võrrand isolatsiooni väliskihi temperatuuri T jaoks. Lahendades saame

$$T = \frac{k\beta T_0 + r_v\alpha T_1}{k\beta + r_v\alpha} = 53,3^\circ\text{C.} \quad [2 \text{ p.}]$$

Asendades selle tagasi esialgsesse seosesse, saame pärast lihtsustamist ja β asendamist

$$q'_L = \frac{q}{L} = 2\pi \frac{T_0 - T_1}{\frac{1}{r_v\alpha} + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_v}{r_s}\right)} = 366,5 \text{ W/m.} \quad [1 \text{ p.}]$$

e) Säätetud võimsus meetri kohta on $\Delta q_L = 3267 - 366,5 = 2900,5 \text{ W}$. Aastas säätetud soojushulk meetri kohta:

$$\begin{aligned} Q_{aasta} &= 2900,5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx \\ &\approx 91470 \text{ MJ.} \quad [1 \text{ p.}] \end{aligned}$$

Rahaline sääst: $91470 \cdot 0,011 \approx 1006 \text{ €/aasta.} \quad [0,5 \text{ p.}]$ Tasuvusaeg päevades:

$$t = \frac{150}{1006/365} \approx 54,4 \text{ päeva.} \quad [0,5 \text{ p.}]$$

f) Sisendvõimsus kütusest:

$$\begin{aligned} P_{kütus} &= \frac{N + q'_L \cdot L}{\eta_{katel}} = \frac{9,98 + 0,0366}{0,9} \approx \\ &\approx 11,13 \text{ MW.} \quad [0,5 \text{ p.}] \end{aligned}$$

Kasulik väljundvõimsus (elekter + soojus) [1 p.]:

$$P_{el} = N \cdot \eta_{turb} = 2,994 \text{ MW}$$

$$P_{soojus} = (N - P_{el}) \cdot \eta_{kond} \approx 6,287 \text{ MW}$$

Üldine kasutegur:

$$\eta = \frac{2,994 + 6,287}{11,13} \approx 0,8338 \approx 83,4\%. \text{ [0,5 p.]}$$

T3. Prototüüpne keemiline energiaallikas (10 p.)

Autor: Irina Petrotšenko

a) Leeliselises keskkonnas (2,0 mol/L KOH) toimuvad galvaanielemendis järgmised poolreaktsioonid:

- Anood (oksüdeerumine):
 $\text{Zn} + 4\text{OH}^- \rightarrow [\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-} + 2e^-$
 (või $\text{Zn} + 2\text{OH}^- \rightarrow \text{ZnO} + \text{H}_2\text{O} + 2e^-$) [0,5 p.]
- Katood (reduktseerumine):
 $\text{MnO}_2 + \text{H}_2\text{O} + e^- \rightarrow \text{MnOOH} + \text{OH}^-$ [0,5 p.]

b) Arvutame tegelikud redokspotentsiaalid temperatuuril $T = 45^\circ\text{C} = 318,15 \text{ K}$. Esmalt leiame uue Nernsti kordaja:

$$\frac{RT}{F} = 0,0257 \text{ V} \cdot \frac{318,15}{298,15} \approx 0,02742 \text{ V}. \text{ [0,5 p.]}$$

Katoodi potentsiaali E_{kat} leidmiseks arvutame:

Standardpotentsiaali muutus:

$$\Delta E^0 = (45 - 25) \cdot (-0,015 \text{ V}/^\circ\text{C}) = -0,30 \text{ V}. \text{ [0,25 p.]}$$

$$\text{Uus } E_{\text{kat},45}^0 = 0,15 - 0,30 = -0,15 \text{ V}. \text{ [0,25 p.]}$$

$$\text{Aktiivsus: } a_{\text{OH}^-} = 2,0 \cdot 0,75 = 1,5. \text{ [0,25 p.]}$$

$$E_{\text{kat}} = E_{45}^0 - \frac{RT}{F} \ln(a_{\text{OH}^-}) =$$

$$= (0,15 - 0,30) - 0,02742 \cdot \ln(1,5) \approx$$

$$\approx -0,161 \text{ V}. \text{ [0,25 p.]}$$

Anoodi potentsiaali E_{an} leidmiseks (reduktseerumispotentsiaalina) arvutame kõigepealt aktiivsused $a_{\text{ion}} = 0,50 \cdot 0,75 = 0,375$ ja $a_{\text{OH}^-} = 1,5$ ja seejärel Nernsti võrrandist

$$E_{\text{an}} = E_{\text{an}}^0 - \frac{RT}{2F} \ln \frac{a_{\text{OH}^-}^4}{a_{\text{ion}}} =$$

$$= -1,25 - \frac{0,02742}{2} \ln \frac{1,5^4}{0,375} \approx$$

$$\approx -1,286 \text{ V}. \text{ [0,5 p.]}$$

c) Elemendi teoreetiline elektromotoorjõud $\mathcal{E}$ on katoodi ja anoodi potentsiaalide vahe:

$$\mathcal{E} = E_{\text{kat}} - E_{\text{an}} =$$

$$= -0,161 - (-1,286) = 1,125 \text{ V}. \text{ [2 p.]}$$

d) Lisaaaine mõjul nihkub katoodi potentsiaal positiivsemaks, suurendades elemendi pinget:

$$\mathcal{E}_{\text{uus}} = 1,125 + 0,12 = 1,245 \text{ V}. \text{ [1 p.]}$$

e) Tsingi täiendav lahustumine tõstab tsinkaatioonide aktiivsust. Potentsiaali muutus ΔE :

$$\Delta E = -\frac{0,02742}{2} \ln \left(\frac{0,503}{0,500} \right) \approx$$

$$\approx -0,00008 \text{ V}. \text{ [1 p.]}$$

Mõju on üliväike ($\approx 0,08 \text{ mV}$), mis näitab süsteemi keemilist stabiilsust väikese korrosiooni suhtes. [1 p.]

f) Ülepotentsiaal η tekib kineetiliste takistuste (nt ionide difusioon läbi MnOOH kihi) tõttu. See muudab osa keemilisest energiast soojuseks, vähendades kättesaadavat elektrienergiat ja seega elemendi kasutegurit. [1 p.]

Lõplik tööpinge U :

$$U = \mathcal{E}_{\text{uus}} + \eta =$$

$$= 1,245 + (-0,08) = 1,165 \text{ V}. \text{ [1 p.]}$$